

ANÁLISIS

ESTRUCTURAL

con MATRICES

PROBLEMAS RESUELTOS



ANÁLISIS ESTRUCTURAL CON MATRICES

Autor: Ing. Alejandro Segundo Vera Lazaro

© Derecho de autor reservado
Empresa Editora Macro E.I.R.L.

© Derecho de edición, arte gráfico y diagramación reservados
Empresa Editora Macro E.I.R.L.

Edición a cargo de:

Empresa Editora Macro E.I.R.L.

Av. Paseo de la República 5613 – Miraflores

Lima - Perú

☎ (511) 748-0560

✉ ventas@editorialmacro.com

<http://www.editorialmacro.com>

Primera edición: Octubre 2013 - 1000 ejemplares

Impreso en los Talleres Gráficos de

Empresa Editora Macro E.I.R.L.

Lima - Perú

ISBN N° 978-612-304-160-1

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2013-16280

Prohibida la reproducción parcial o total, por cualquier medio o método de este libro sin
previa autorización de la Empresa Editora Macro E.I.R.L.



ING. ALEJANDRO SEGUNDO VERA LAZARO

Ingeniero mecánico egresado de la Universidad Nacional de Trujillo. Diplomado en *Computer Adding Design and Computer Adding Engineering CAD-CAE-UCV*, especialización en Análisis Vibracional en Máquinas y Estructuras Mecánicas con Modelamiento en Elementos Finitos en Diseño Mecánico. Cuenta con Maestría en Ingeniería Mecánica Eléctrica con mención en Energía (Convenio UNPRG-CARELEC). Docente universitario a tiempo completo en la Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo, Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica. Consultor del Área de Diseño de la empresa CAD-CAE Ingenieros y consultor en Eficiencia Energética bajo la Norma ISO 50001. Instructor de MATLAB y *Solidworks Simulation* en estudio estático, frecuencial y térmico; así como en *Computational Fluids Dynamics* (CFD).

Líneas de investigación

- Aplicación del método de los elementos finitos a la Ingeniería en Diseño de máquinas.
- Proyectos, planificación, gestión en energías renovables.
- Diseño y dimensionamiento de sistemas eólicos *onshore* y *offshore*.

Agradecimientos

A todas las personas que, de alguna u otra forma, me apoyaron para que esta obra salga a la luz.

A Rodrigo Echeandía y Rodolfo García, por ser buenos amigos y haber compartido conmigo grandes momentos en los congresos académicos, por las investigaciones realizadas a la fecha.

A Isabel Ramos, por la confianza depositada en mi persona.

Dedicatoria

A Evelyn Montoya, por ser una gran amiga, haberme apoyado en los momentos que más lo necesitaba y sobre todo por confiar en mi trabajo; siempre te dije: “Las promesas se cumplen; sino la palabra de un hombre no vale nada”.

Introducción

La presencia de la existencia de las computadoras ha dado un cambio en el estudio de la ingeniería; por esta razón, el libro *Análisis estructural con matrices* tiene como finalidad desarrollar el denominado «método de la rigidez de cálculo matricial», aplicado a estructuras bidimensionales formadas por barras y vigas, a partir de elementos unidimensionales, desde el más básico como es el elemento resorte. Este mismo esquema puede ser extendido a otras formas de discretizar una estructura o un medio continuo. De hecho, el método de los elementos finitos es la extensión del método de cálculo matricial, donde se trata con elementos que no son solo barras; sino volúmenes de distintas formas geométricas que modelan un mayor número de problemas mecánicos o físicos.

En todo el desarrollo del método, se aceptan las hipótesis generales en las que normalmente se desarrollan los cursos de la teoría de estructuras, es decir: el comportamiento elástico y lineal del material, así como el estado de pequeños desplazamientos.

El libro pretende que el estudiante pueda plantear las distintas matrices de rigidez para los diferentes elementos estructurales, los analice, los pueda plantear y con el apoyo del software MATLAB pueda resolver los cálculos finales para obtener una respuesta rápida; por este motivo en cada uno de los problemas se anexa el desarrollo en el software MATLAB. En el último capítulo, se proponen dos aplicaciones para tener un acercamiento a la realidad.

El autor

Índice

Capítulo 1

MÉTODO DE LA RIGIDEZ	13
1.1. HIPÓTESIS.....	15
1.2. ASPECTOS GENERALES	15
1.3. MÉTODO DE LA RIGIDEZ UTILIZANDO UNA COMPUTADORA.....	16
1.3.1. Identificación estructural	16

Capítulo 2

ANÁLISIS DE RESORTES	17
2.1. VISIÓN GENERAL.....	19
2.2. CONCEPTOS BÁSICOS	19
2.2.1. Nodo.....	19
2.2.2. Elemento	19
2.2.3. Grado de libertad (GDL).....	19
2.2.4. Local y global	19
2.2.5. Enfoque básico	20
2.3. ASOCIACIÓN DE RESORTES	22
2.3.1. La fuerza y energía elásticas de un resorte o muelle.....	22
2.3.2. Asociación o acoplamiento de resortes.....	22

Capítulo 3

PRINCIPIO DE HIPERESTATICIDAD	41
3.1. GRADOS DE INDETERMINACIÓN.....	43
3.1.1. Indeterminación estática.....	43
3.1.2. Indeterminación cinemática.....	43
3.2. CLASIFICACIÓN DE ESTRUCTURAS.....	43
3.3. CÁLCULO DEL GRADO DE INDETERMINACIÓN O HIPERESTATICIDAD	43

Capítulo 4

BARRA 1D	51
4.1. ANÁLISIS ESTÁTICO LINEAL	53
4.1.1. Construir el elemento	53
4.1.2. Matriz de rigidez y el método directo	53
4.2. BARRA 1D CON EFECTOS TÉRMICOS	68

Capítulo 5

BARRA 2D	71
5.1. TRANSFORMACIÓN	73
5.2. MATRIZ DE RIGIDEZ EN 2D	74
5.3. ESFUERZO DEL ELEMENTO	75

Capítulo 6

TORSIÓN	143
----------------------	-----

Capítulo 7

VIGAS	165
7.1. ELEMENTO VIGA SIMPLE (1D)	167
7.2. TEORÍA DE LA VIGA ELEMENTAL	167
7.2.1. Método directo.....	167
7.2.2. Análisis de estructuras de marcos planos.....	168
7.3. VIGA 2D	220
7.4. ESTRUCTURAS 2 – D	231

Capítulo 8

APLICACIONES EN LA INGENIERÍA.....	363
TRABAJO DE APLICACIÓN EN INGENIERÍA: ANÁLISIS MATRICIAL DE UN TRAMO DEL MUELLE DE PIMENTEL, CHICLAYO	365
DISEÑO ESTRUCTURAL DE UN SISTEMA DE PLATAFORMA DE ELEVACIÓN DE AUTOMÓVILES A TRAVÉS DEL MÉTODO MATRICIAL EN UNA PLAYA DE ESTACIONAMIENTO	382
DISEÑO ESTRUCTURAL A TRAVÉS DEL ANÁLISIS MATRICIAL DE UNA TRIBUNA EN LA CANCHA DEPORTIVA EN UNA UNIVERSIDAD	389
DISEÑO DE UN PUENTE PEATONAL	411

⋮ **MÉTODO DE LA RIGIDEZ**

1.1. HIPÓTESIS

- Estructura lineal. Todos los movimientos y esfuerzos son funciones lineales de las cargas.
- Pequeñas deformaciones. Ecuaciones de equilibrio en la estructura no distorsionada.
- Las barras son rectas y de sección constante.
- Para estudiar una estructura por el método de la rigidez, al igual que en cualquier otro problema elástico, se dispone de tres conjuntos de ecuaciones que deben cumplirse:
 - Ecuaciones de compatibilidad
 - Ecuaciones constitutivas
 - Ecuaciones de equilibrio

1.2. ASPECTOS GENERALES

Las ecuaciones de compatibilidad relacionan las deformaciones de barras con los desplazamientos nodales. Introduciendo estas relaciones en las ecuaciones constitutivas, asocia las fuerzas en los extremos de barras con los desplazamientos nodales. Introduciendo estas últimas relaciones en las ecuaciones de equilibrio, se obtiene un conjunto de ecuaciones de fuerzas nodales en función de desplazamientos nodales, que pueden ser consideradas como ecuaciones de equilibrio de la estructura en función de desplazamientos.

La resolución de este sistema de ecuaciones permite obtener el valor de las incógnitas (desplazamientos nodales) a partir de los cuales se obtienen las solicitaciones de las barras de la estructura, así como las reacciones.

Cuando se van a calcular las relaciones esfuerzos de extremo de barra-desplazamientos, es natural escoger un sistema de coordenadas que haga estas ecuaciones lo más sencillas posible. Se tomará, por lo tanto, como eje X el que coincide con el eje geométrico de la pieza y los ejes Y y Z coincidentes con los ejes principales de la sección transversal. Tal sistema pertenece a la barra y no depende de la orientación de la misma en la estructura y se le denominará «sistemas de ejes locales». Por el contrario, cuando las piezas se unen entre sí para formar la estructura, es necesario tener un sistema de coordenadas común para todos los movimientos y esfuerzos de extremo de barras para poder aplicar las condiciones de equilibrio y compatibilidad. A dicho sistema, se le denominará «sistema de ejes globales». Dichos esfuerzos de extremos de barras y desplazamientos, dependerán del tipo de estructura que está resolviendo, para barras de:

- *Reticulado plano*: Dos desplazamientos por nudo.
- *Reticulado espacial*: Tres desplazamientos por nudo.
En ambos casos, solo se obtendrán esfuerzos normales.
- *Pórtico plano*: Tres desplazamientos por nudo (una rotación en el plano del pórtico y dos traslaciones). Como solicitaciones de extremo de barra una fuerza axial: un esfuerzo de corte y un momento flector.
- *Pórtico espacial*: Seis desplazamientos por nudo, tres traslaciones y tres rotaciones. Como solicitaciones de extremo de barra una fuerza axial: dos esfuerzos de corte, dos momentos flectores y un momento torsor.
- *Emparrillado de vigas*: Tres desplazamientos nodales (un corrimiento normal al plano de la grilla) y dos rotaciones alrededor de los ejes contenidos en el plano mencionado. Los esfuerzos son un cortante y dos momentos (un torsor y un flector).

1.3. MÉTODO DE LA RIGIDEZ UTILIZANDO UNA COMPUTADORA

Una de las características más importantes del método de la rigidez es la forma en que las propiedades elásticas de las piezas y su orientación dentro de la estructura, son introducidas en el cálculo antes de que se efectúe alguna consideración sobre el equilibrio o la compatibilidad de los nudos.

Esto permite establecer relaciones entre las fuerzas de extremo de barras y los desplazamientos de nudo. Dichas relaciones expresadas en forma matricial, se denomina «matriz de rigidez de barra».

Al considerar la interrelación de cada barra con las demás, se obtiene un sistema global de ecuaciones que define el comportamiento de toda la estructura y conduce a la solución del problema.

Se considera seis etapas fundamentales en la solución de un problema:

- Identificación estructural
- Cálculo de la matriz de rigidez de barra y del vector de cargas nodales equivalentes
- Cálculo de la matriz de rigidez global y del vector de cargas global de la estructura
- Introducción de las condiciones de borde
- Solución del sistema de ecuaciones
- Cálculo de solicitaciones en los extremos de barras y reacciones nodales

1.3.1. IDENTIFICACIÓN ESTRUCTURAL

Esta etapa consiste en definir a través de números y datos las barras de la estructura.

- *Definir un sistema de ejes globales para la estructura:* Las coordenadas de los nudos se refieren a dicho sistema.
- *Conectividad de los elementos:* Identificando para cada barra el nudo inicial y el final. A cada barra está asociado un sistema de ejes locales al cual se refieren todas las dimensiones y características de la barra. El mismo queda definido automáticamente por el orden establecido para la numeración de los nudos de la barra. El eje X local coincide con el eje geométrico de la barra, siendo el sentido positivo el que va del nudo inicial (nudo de menor numeración) al final (nudo de mayor numeración). Los otros ejes locales deberán coincidir con los ejes principales de inercia de la sección transversal de la barra formando un triedro directo.
- *Propiedades de la sección transversal de cada barra:* Dependiendo del tipo de estructura (reticulado, pórtico plano, pórtico espacial, emparrillado), se debe dar el área de la sección transversal, los momentos de inercia en relación a los ejes principales y la inercia a la torsión.
- *Propiedades del material:* Se debe indicar, para cada barra, el módulo de elasticidad longitudinal o el módulo de elasticidad transversal.
- *Especificación de los vínculos:* Se debe indicar el nombre del nudo que tiene una o más restricciones y cuáles son las mismas.
- *Descripción de la carga:* Se da el nombre del nudo y los componentes de globales de las cargas externas y las reacciones de empotramiento perfecto en relación a los ejes locales de la barra si hay cargas en el tramo.

Impreso en los Talleres Gráficos de



Surquillo