DINÁMICA ESTRUCTURAL

[1 GDL]

PROBLEMAS RESUELTOS

Aplicaciones con MatLab

EMPRESA EDITORA
MACRO®

Dinámica Estructural
Problemas Resueltos. Aplicaciones con Matlab
Autor: Alejandro Vera Lázaro

Edición a cargo de:
Empresa Editora Macro E.I.R.L.
Av. Paseo de la República 5613 – Miraflores
Lima - Perú
(511) 719-9700
ventas@editorialmacro.com
http://www.editorialmacro.com

Primera edición: Noviembre 2011

Tiraje: 1500 ejemplares

Impreso en los Talleres Gráficos de
Empresa Editora Macro E.I.R.L.
Lima - Perú

ISBN Nº 978-612-304-037-6
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2011-15209

MACRO
EMPRESA EDITORA

Agradecimientos

A MIS GRANDES AMIGOS

Vanessa Beltrán, Gianina Calmet, Sandra Loaisa, Magaly Castillo, Ana Seminario, Sonia Salazar, Alberto Hananel y Ciro Bazán, quienes creyeron en mi proyecto y me brindaron su apoyo incondicional para seguir adelante.

A MIS COLEGAS ACADÉMICOS

Msc. Ing. Eduardo Larrea por las largas conversaciones sobre Ingeniería estructural y la necesidad que existe en nuestro país de implantar cursos que sienten bases sólidas en las universidades peruanas que formen en el futuro inmediato, mejores Ingenieros estructuralistas.

Dr. Max Arroyo de quien aprendí la gran diferencia que existe entre un Ingeniero Operativo y un Ingeniero Investigador.

Dra. Sofía Lavado por la confianza depositada en mi trabajo y a la Dra. Mirtha Cervera por brindarme su apoyo y aliento para continuar escribiendo.

A MIS COLABORADORES

Liseth Montoya, Annie Yon, Patricia Roncal, Laurita Huamán, Marco Chuquilín; por la compilación, digitación y diseño del contenido, a quienes les auguro ser Ingenieros Civiles de éxito.

A CAD-CAE INGENIEROS

Por hacer realidad este sueño, en especial a Luz Benavides.

A MI FAMILIA

Por su apoyo incansable y su paciencia para finalizar esta obra.

Dedicatoria

A la memoria de mi padre, Alejandro Vera Yengles, el que fue un gran amigo y compañero, con quien compartí los mejores momentos de mi vida y con el cual en los últimos años mantuve largas y entretenidas conversaciones, charlas que me permitieron ver el mundo con una mente más amplia y gracias a las que aprendí a tomar oportunas y mejores decisiones.

Hice una promesa frente a tú última morada, escribir este libro, desde donde estés siento que guías mis pasos y sé que lo estas observando, y que ahora mi felicidad es tuya también.

Tú recuerdo vivirá en mi mente y en mi corazón por siempre.

Presentación

El objetivo del presente libro tiene un alcance mayor a solo ofrecer los elementos de base relacionados con la dinámica clásica, que permitirá a los lectores comprender con claridad y aplicar con mayor criterio los conceptos; sino que también introduce a los lectores en el uso de modelos matemáticos y la representatividad gráfica de los mismos, para lograr así un análisis más detallado y puntual, que permita una mejor toma de decisiones en el diseño de los sistemas estructurales.

Este primer volumen, que analiza sistemas de un grado de libertad es un libro básico en la comprensión de sistemas estructurales que son sometidos a fuerzas variables. El volumen trata los siguientes temas:

CAPÍTULO I: Se definen los elementos básicos que deben conocerse para realizar un modelo matemático correcto.

CAPÍTULO II: Se presentan problemas resueltos de sistemas estructurales libres con un grado de libertad (1GDL).

CAPÍTULO III: Se presentan problemas resueltos de sistemas estructurales amortiguados con un grado de libertad (1GDL).

CAPÍTULO IV: Se presentan problemas resueltos de sistemas estructurales con vibración armónica con un grado de libertad (1GDL), tanto amortiguados como no amortiguados.

CAPÍTULO V: Se presentan problemas resueltos de la Transformada de Laplace tanto directa como Inversa.

CAPÍTULO VI: Se presentan problemas resueltos de sistemas estructurales con la herramienta matemática de la Transformada de Laplace apoyados con el software Matlab y SIMULINK.

La particularidad del libro reside en la gran cantidad de problemas que se resuelven paso a paso haciendo más didáctico el proceso de aprendizaje del análisis estructural. Esta generosidad de ejemplos y problemas expuestos en cada capítulo, llevando los modelos matemáticos a su representación gráfica a través del programa MATLAB y el simulador SIMULINK los cuales son usados en las mejores universidades del mundo por su facilidad para realizar cálculos científicos así como simulaciones dentro del ámbito de la ingeniería, y sumado a la información teórica puntual que existe permitirá desarrollar en el futuro ingeniero, habilidades para el análisis profundo de todo tipo de estructuras con uno y posteriormente con n grados de libertad.

No queda más que recomendar presente publicación del Ingeniero Alejandro Vera como uno de los libros textos más compresivo y práctico en dinámica estructural.

Dr. Ing. Maximiliano Arroyo Ulloa - Universitá di Roma “La Sapienza”, Italia.

Revisor por la Editorial Elsevier - Holanda

Consultor por la empresa internacional ISMERI S.A. (Italia).

Índice

Capítulo 6

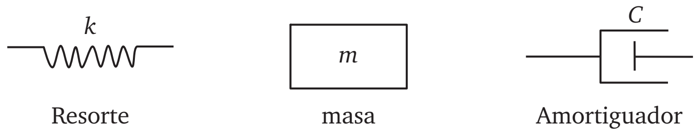
CAPÍTULO

1

NOCIONES PRELIMINARES

1.1 ELEMENTOS BÁSICOS TRASLACIONALES

En todo estudio de vibración traslacional se tienen que tener en cuenta los siguientes elementos básicos.

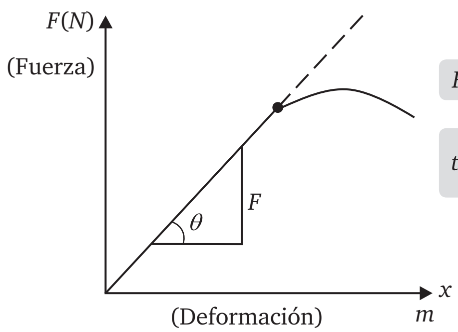


A) Elemento Resorte (Resistencia α Desplazamiento)

Son elementos de máquinas que sometidas a cargas varían su forma entre límites más o menos amplios, siempre que estas cargas no las expongan a solicitaciones superiores a límites de elasticidad del material con el cual están construidos, produciendo su destrucción. Se utilizan como uniones de máquinas a sus bases, para disminuir sus trepidaciones, para almacenar energía para el accionamiento de dispositivos, para la suspensión de diferentes partes de vehículos para absorción de impactos, etc.

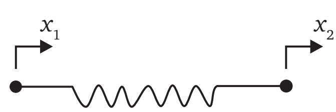
Existen dos tipos de resortes:
- Lineales
- No Lineales

- **Resortes Lineales**:
  Donde la deformación varía linealmente con la fuerza aplicada.



$$F = k\Delta x$$

$$tg\,\theta = k = \frac{F}{\Delta x}$$



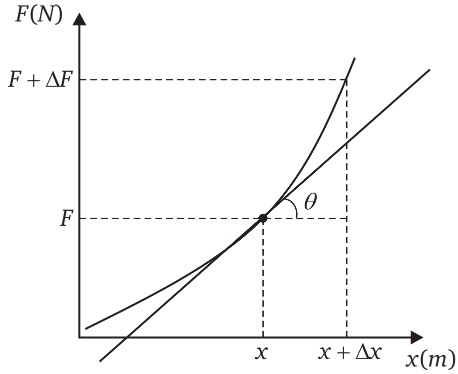
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

- **Resortes no lineales**:

  Son aquellas cuya deformación depende de la fuerza variable que actúa sobre dicho resorte; generalmente se trata de convertirlo en una forma lineal, utilizando un proceso de linealización.

  En el estado de equilibrio el resorte se carga con una fuerza variable $\vec{F}(x)$; generando en él una deformación x; si se incrementa una pequeña cantidad de fuerza $\Delta\vec{F}$; entonces el resorte se deforma una cantidad Δx adicional.

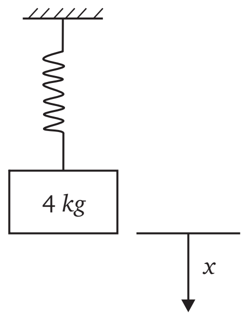
La nueva fuerza F+ΔF genera una deformación x+Δx.



$$tg\,\theta = k$$

$$k = \frac{dF}{dx}$$

Ejemplo:



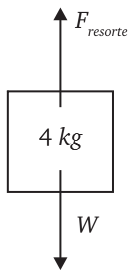
Una masa de 4 kg está suspendida de un resorte no lineal cuya fuerza es variable y está gobernada mediante la siguiente ecuación:

$$F = 20x + 8x^3$$

donde F está en Newton y x en metros.

Hallar la frecuencia natural de oscilación para un comportamiento lineal alrededor de la posición de equilibrio.

En el equilibrio:



$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$F_{resorte} - mg = 0$$

$$(20x + 8x^3) - 4(9{,}81) = 0$$

$$20x + 8x^3 - 39{,}24 = 0$$

$$8x^3 + 20x - 39{,}24 = 0$$

resolviendo x para el equilibrio, se tiene:

$$x = 1{,}225\ m$$

Entonces: linealizando, se tiene:

$$k_{lineal} = \frac{dF_{resorte}}{dx}$$

$$k_{lineal} = \frac{d\left(8x^3 + 20x\right)}{dx}$$

$$k_{lineal} = 24x^2 + 20$$

Reemplazando: $x = 1{,}225$ m

$$k_{lineal} = 24\left(1{,}225\right)^2 + 20$$

$$k_{lineal} = 56{,}015 N/m \qquad \text{(en equilibrio)}$$

Entonces la frecuencia natural de oscilación:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{lineal}}{m}}$$

$$\omega_n = 3{,}74 rad / s$$

Analizaremos un resorte de dos nodos.

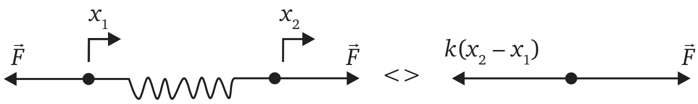


Diagrama de cuerpo libre (DCL)

$$F = k\left(x_2 - x_1\right)$$

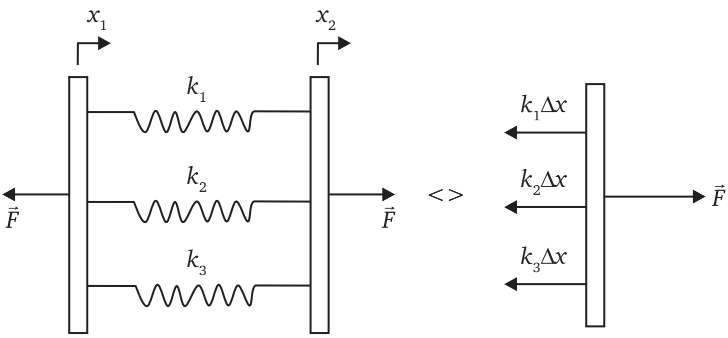
$$F = k\Delta x$$

donde:

k:Constante elástica o Rigidez del resorte (N/m; kg/s^2)

Δx:Desplazamiento relativo de los nodos del resorte (m;mm)

a) Resortes en Paralelo

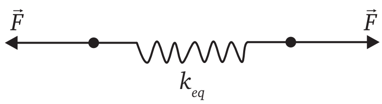


$$F = k_1\Delta x + k_2\Delta x + k_3\Delta x$$

$$F = \left(k_1 + k_2 + k_3\right)\Delta x$$

$$F = k_{eq}\Delta x$$

Entonces el sistema equivalente será:



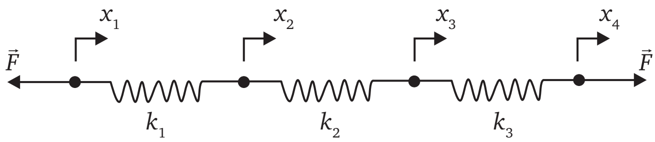
donde:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3$$

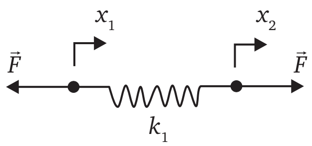
Generalizando para "n" resortes en paralelo:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + \ldots + k_n = \sum_{j=1}^{n} kj$$

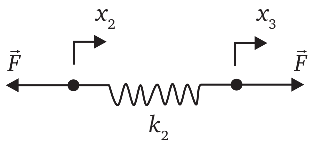
b) Resortes en Serie



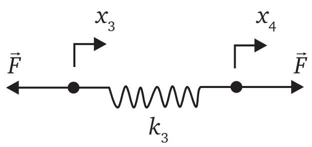
Analizando cada uno de los resortes:



$$\Rightarrow F = k_1\left(x_2 - x_1\right) = k_1\Delta x_1$$



$$\Rightarrow F = k_2\left(x_3 - x_2\right) = k_2\Delta x_2$$



$$\Rightarrow F = k_3\left(x_3 - x_4\right) = k_3\Delta x_3$$

Entonces la deflexión total será:

$$\Delta x = x_3 - x_1$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$$

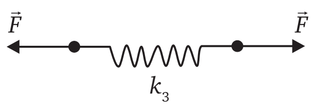
$$\Delta x = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3}$$

$$\Delta x = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right)F$$

de donde:

$$F = \underbrace{\frac{\Delta x}{\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right)}}_{k_{eq}}$$

Entonces el sistema equivalente será:



donde:

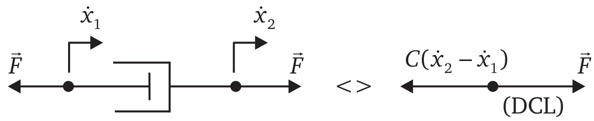
$$k_{eq} = \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$

Generalizando para "n" resortes en serie:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \ldots + \frac{1}{k_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{kj}$$

B) Elemento Amortiguador (Viscosidad $\propto$ Velocidad)

Analizaremos el siguiente amortiguador:



Para casos lineales:

$$F = c\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)$$

$$\boxed{F = c\left(\Delta\dot{x}\right)}$$

donde:

c: constante de amortiguamiento $\left(\frac{Ns}{m};\frac{kg}{s}\right)$

$\Delta\dot{x}$: velocidad relativa (m/s)

Amortiguadores en serie y en paralelo:
El desarrollo es similar a los resortes; es decir para "n" amortiguadores; se tiene:

a) En Serie:

$$\boxed{\frac{1}{c_{eq}} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{cj}}$$

b) En Paralelo:

$$\boxed{c_{eq} = \sum_{j=1}^{n} Cj}$$

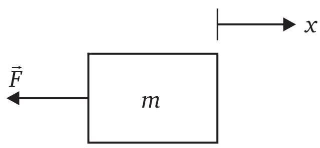
donde:

n = número de amortiguadores

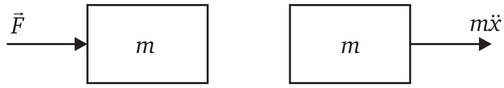
C_{eq}: constante de amortiguación equivalente

C) Elemento Masa – Inercia (Resistencia $\propto$ Aceleración)

Consideremos un cuerpo de masa "m"



Entonces el diagrama de cuerpo libre será:

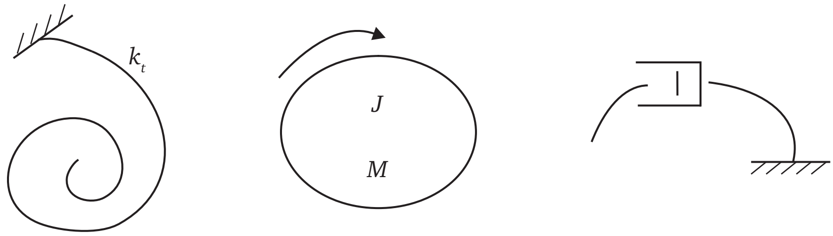


Por lo tanto:

$$\boxed{F = m\ddot{x}}$$

1.1.1 ELEMENTOS BÁSICOS ROTACIONALES

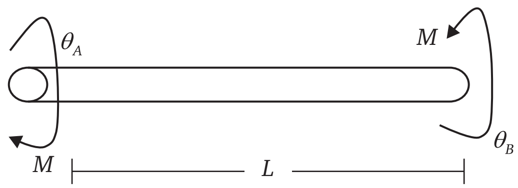
En todo estudio de vibración rotacional, se deben tener en cuenta los siguientes elementos básicos:



(Resorte Torsional) Inercia Rotativa Amortiguador Torsional

I. Elemento resorte Torsional (Resistencia ∝ Desplazamiento angular)

Aplicamos un momento M(par de torsión); el cual tiende a hacer girar a un miembro recto y largo (eje, tubo, etc.) con respecto a su eje longitudinal, lo cual genera un ángulo de torsión θ.



donde:

$$M = k_t \left|\theta_A - \theta_B\right|$$

$$\boxed{k_t = \frac{M}{\left|\theta_A - \theta_B\right|}}$$

M: Momento (par de torsión)(Nm)

θ_A ; θ_B: Ángulos Torsionales (rad)

k_t: Rigidez Torsional $\left(\frac{Nm}{rad}\right)$

También:

$$\boxed{k_t = \frac{G\,J}{L}}$$

G: Módulo de Rigidéz par cortante (Pa)

L: Longitud del elemento (m)

J: momento polar de inercia (m^4)

Impreso en los Talleres Gráficos de

MACRO®
EMPRESA EDITORA

Surquillo
☎ 7199700 - 7199701
Noviembre 2011